CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012
Profil real, specializarea științele naturii

Clasa a IX-a

1. Determinați numerele reale $x \in [-1,0]$ și $y \in [1,2]$ pentru care $4x^2 + y^2 + 16 \le 4xy - 16x + 8y$.

2. Un automobil pleacă din București către Iași la ora 0^{00} și merge cu o viteză constantă de 60 km/h. Un alt automobil pleacă din Iași către București la ora 1^{00}, cu viteza constantă de 70 km/h. Se știe că distanța Iași - București este de 420 km. Notăm cu $f(x)$ și $g(x)$ distanțele la care se află față de București primul, respectiv al doilea automobil la ora x.

a) Determinați legile de corespondență ale funcțiilor $f, g : [0,7] \to \mathbb{R}$.

b) Trasați graficele celor două funcții.

c) Aflați ora la care se vor întâlni cele două automobile (cu aproximație de un minut).

3. Pe latura BC a triunghiului ABC se consideră punctul D astfel încât $\frac{BD}{BC} = \frac{1}{3}$. Pe segmentul AD se iau punctele $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ astfel încât, pentru fiecare $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, punctul A_i împarte segmentul AD în raportul $\frac{AA_i}{AD} = \frac{i}{n}$. Arătați că există un punct A_i pentru care dreapta BA_i trece prin mijlocul segmentului AC dacă și numai dacă numărul natural nenul n este divizibil cu 4.

Gazeta Matematică (Supliment)

4. Considerăm triunghiul ABC isoscel cu $AB = AC = 25$, iar $BC = n,\ n \in \mathbb{N}^*$.

a) Câte triunghiuri de acest tip există?

b) Dați patru exemple de valori ale lui n pentru care aria triunghiului se exprimă printr-un număr rațional și patru exemple de valori ale lui n pentru care aria se exprimă printr-un număr irațional.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012
Profil real, specializarea ştiințele naturii

Clasa a X-a

1. a) Unui angajat i se reduce salariul cu 25%. Cu cât la sută trebuie să i se mărească salariul pentru ca acesta să ajungă la valoarea inițială?
b) Doi angajați au acelaşi salariu. Pe parcursul a trei ani, primului angajat i se reduce salariul cu 25%, după care i se măreşte cu 25%. Al doilea angajat suferă întâi o diminuare a salariului cu 25%, după care obține o majorare de 10% şi apoi o altă majorare cu 15%. Care dintre cei doi angajați va avea salariul mai mare la final?

Gazeta Matematică (Supliment)

2. a) Dacă x, y sunt numere reale, arătați că $xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.
b) Fie $a > 1, b > 0$. Demonstrați că are loc inegalitatea $\log_a(a^b - 1) \cdot \log_a(a^b + 1) < b^2$.

3. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ astfel încât $f(0) = \frac{1}{2}$ şi, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, are loc egalitatea $f(x+y) = f(x) \cdot f(-y) + f(-x) \cdot f(y)$.
a) Demonstrați că $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
b) Determinați funcția *f*.

4. Într-o galaxie *complexă*, toate planetele se află pe un acelaşi cerc având drept centru Soarele şi raza egală cu o unitate galactică. Considerăm trei planete *A*, *B* şi *C*, ale căror poziții în galaxie sunt exprimate cu ajutorul numerelor complexe z_A, z_B, z_C astfel încât $z_A + z_B + z_C = 0$.
a) Arătați că pentru orice numere $z, w \in \mathbb{C}$ au loc egalitățile $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ şi $|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - (z \cdot \overline{w} + \overline{z} \cdot w)$, unde $\overline{z}$ este conjugatul numărului complex *z*.
b) Arătați că $|z - z_A|^2 + |z - z_B|^2 + |z - z_C|^2 = 3 \cdot (|z|^2 + 1)$, pentru orice corp ceresc (nu neapărat planetă) reprezentat în galaxie cu ajutorului numărului complex *z*.
c) Dacă triunghiul *ABC* (al planetelor) este echilateral, iar *M* este un corp ceresc situat pe cercul înscris în acest triunghi, arătați că suma $MA^2 + MB^2 + MC^2$ este constantă.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012
Profil real, specializarea științele naturii

Clasa a XI-a

1. Fie matricele $A_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{n}} & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați $\det A_{2012}$.

b) Arătați că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\det A_1 + \det A_2 + \ldots + \det A_n > 2012$.

2. Primul pătrat magic publicat în Europa a apărut într-o pictură din anul 1514 a pictorului german Albrecht Dürer; el arăta ca în figura alăturată. Pătratul magic este completat cu numerele 1, 2, 3, ..., 15, 16 astfel încât suma numerelor de pe fiecare linie, de pe fiecare coloană, de pe fiecare diagonală, precum şi suma numerelor din colțuri să fie aceeaşi.

a) Aflați valoarea lui a.

b) Arătați că suma celor patru numere din centrul pătratului este aceeaşi cu suma numerelor de pe fiecare linie.

c) Calculați suma numerelor din căsuțele haşurate.

16			***a***
b	**15**	**14**	***c***

3. Date două funcții $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vom spune că *funcția f este limitată în raport cu funcția g* dacă există un număr real nenul a astfel încât limita $\lim_{x \to \infty} \left(f(x) - a \cdot g(x) \right)$ există şi este finită.

a) Dacă f este limitată în raport cu g, arătați că şi g este limitată în raport cu f.

b) Dacă f este limitată în raport cu g şi g este limitată în raport cu h, arătați că f este limitată în raport cu h.

Gazeta Matematică (Supliment)

4. Fie $a_n = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \ldots \cdot \cos nx}{x^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați a_1.

b) Demonstrați că $a_n = \frac{1}{2} n^2 + a_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) Calculați a_{2012}.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012
Profil real, specializarea științele naturii

Clasa a XII-a

1. a) Calculați $\int_0^1 (1+u)^n \, du$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Aflați suma $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^{2010}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dacă $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, arătați că $F(1) > 3$.

Gazeta Matematică (Supliment)

3. Demonstrați că mulțimea $\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right\}$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor. Cum explicați că, deși sunt inversabile față de înmulțirea din grupul $\mathcal{G}$, matricele din $\mathcal{G}$ au toate determinatul nul ?

4. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_{25},+,\cdot)$.

a) Calculați $\sum_{\hat{k} \in \mathbb{Z}_{25}} \hat{k}$ şi $\prod_{\hat{k} \in \mathbb{Z}_{25}} \hat{k} = \hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot ... \cdot \widehat{24}$.

b) Dacă alegem un element din inelul $(\mathbb{Z}_{25},+,\cdot)$, ce este mai probabil: ca acesta să fie inversabil sau să fie divizor a lui zero ?

c) Doi copii, Traian şi Emil, joacă următorul joc: fiecare extrage, pe rând, din mulțimea $\mathbb{Z}_{25} = \left\{ \hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, ..., \widehat{23}, \widehat{24} \right\}$, un număr de elemente cuprins între 1 şi 4. Câştigă cel care poate extrage ultimul. Ştiind că primul extrage Traian, indicați o strategie de câştig pentru Emil.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*